第 3 节 等高线问题（★★★☆）

强化训练

1．（2022•赣州期末•★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}(x+2),x<1\\ \ln x,x\geq 1\end{cases}$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $x_2>x_1$，则 x_2-x_1 的最小值为_____.

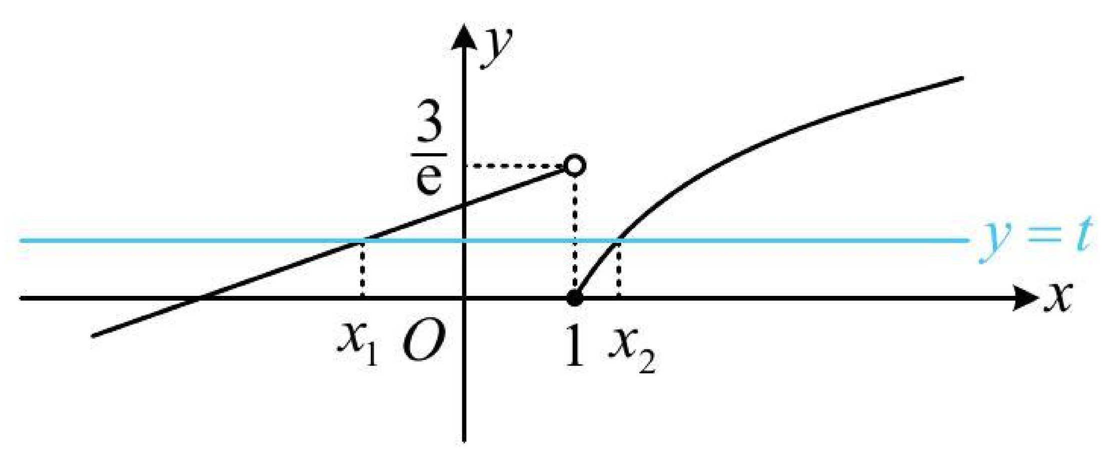
答案：2

解析：欲求 x_2-x_1 的最小值，先通过设 t 将变量统一起来，设 $f(x_1)=f(x_2)=t$，如图，由图可知 $0\leq t<\frac{3}{e}$，且 $x_1<1\leq x_2$，所以 $f(x_1)=\frac{1}{e}(x_1+2)=t\Rightarrow x_1=et-2$， $f(x_2)=\ln x_2=t\Rightarrow x_2=e^t$，从而 $x_2-x_1=e^t-et+2$，

这样变量就统一起来了，接来下将右侧构造成函数，求导研究最值，

设 $\varphi(t)=e^t-et+2(0\leq t<\frac{3}{e})$，则 $\varphi'(t)=e^t-e$，所以 $\varphi'(t)>0\Leftrightarrow 1<t<\frac{3}{e}$， $\varphi'(t)<0\Leftrightarrow 0\leq t<1$，

从而 $\varphi(t)$ 在 $[0,1)$ 上↘，在 $(1,\frac{3}{e})$ 上↗，故 $\varphi(t)_{\min}=\varphi(1)=2$，即 x_2-x_1 的最小值为 2.



2.（★★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1,x\leq 0\\ \lg x,x>0\end{cases}$，若存在不相等的实数 a,b,c,d 满足 $|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=|f(d)|$，则 $a+b+c+d$ 的取值范围为（　　）

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$(-2,\frac{81}{10}]$　　（C）$(-2,\frac{61}{10}]$　　（D）$(0,\frac{81}{10}]$

答案：C

解析：条件给的是函数 $y=|f(x)|$ 在 a，b，c，d 处函数值相等，故用 $y=|f(x)|$ 的图象来分析问题，先画图，

函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图 1， $y=|f(x)|$ 的大致图象如图 2，设 $|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=|f(d)|=t$，

不妨设 $a<b<c<d$，由图 2 知 $0<t\leq 1$， $0<c<1<d$，

直线 $y=t$ 与 $y=|f(x)|$ 的图象在 y 轴左侧的两个交点关于直线 $x=-2$ 对称，所以 $a+b=-4$，

再来看 c 和 d，可将 $|f(c)|=t$ 和 $|f(d)|=t$ 代入解析式，把 c，d 用 t 表示，从而统一变量，

因为 $0<c<1$，所以 $\lg c<0$，从而 $|f(c)|=|\lg c|=-\lg c=t$，故 $c=10^{-t}$，

又因为 $d>1$，所以 $\lg d>0$，从而 $|f(d)|=|\lg d|=\lg d=t$，故 $d=10^t$，所以 $a+b+c+d=-4+10^{-t}+10^t$，

注意到 $10^{-t}=\dfrac{1}{10^t}$，故将 10^t 换元，可简化表达式，令 $u=10^t$，则 $1<u\le 10$，且 $a+b+c+d=-4+\dfrac{1}{u}+u$，

设 $\varphi(u)=-4+\dfrac{1}{u}+u(1<u\le 10)$，则 $\varphi'(u)=-\dfrac{1}{u^2}+1>0$，所以 $\varphi(u)$ 在 $(1,10]$ 上↗，

又 $\varphi(1)=-2$，$\varphi(10)=\dfrac{61}{10}$，所以 $\varphi(u)$ 的值域为 $(-2,\dfrac{61}{10}]$，故 $a+b+c+d$ 的取值范围是 $(-2,\dfrac{61}{10}]$.

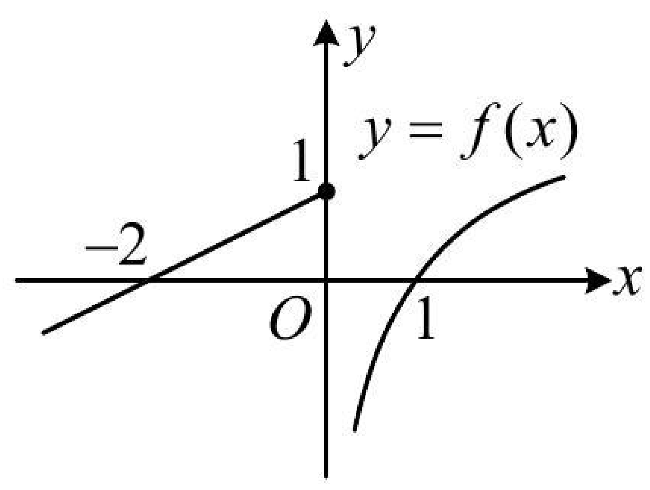


图1

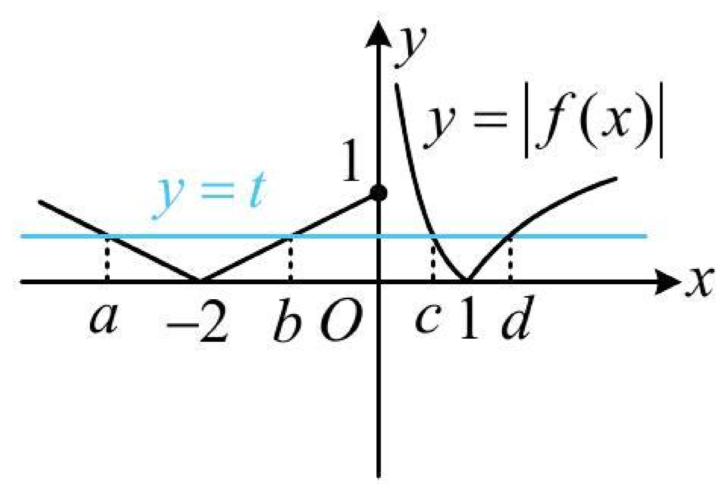


图2

【反思】题干中关于 $|f(a)|$ 的连等式容易让人困扰，但为了使该条件与已知函数形式统一，自然会想到研究函数 $y=|f(x)|$；另外，如果函数具有对称性，结合该性质往往可以简化步骤，本题 $a+b$ 就是通过对称性快速求出的.